dziennik.pl

MatmaNa6
z nami zaliczysz matmę na 6!

# MATURA 2012

# Powtórka do matury z matematyki

## Część V: Ciągi liczbowe
## ROZWIĄZANIA

Organizatorzy: **MatmaNa6.pl** i **Dziennik.pl**

Witaj,

jest to piąta z dziesięciu części materiałów powtórkowych do matury z matematyki. W każdy poniedziałek pod adresem http://dziennik.pl będą dostępne kolejne zadania maturalne do rozwiązania. W czwartki pod tym samym adresem znajdziesz rozwiązania poniedziałkowych zadań, abyś mógł zweryfikować swoje odpowiedzi.

Dzisiaj rozwiązania do zadań z działu ciągi liczbowe.

Powodzenia,

Redaktorzy portalu MatmaNa6.pl

Dziennikarze Dziennik.pl

# Ciągi liczbowe

## Zadanie 1:

Wskaż ciąg, który jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny.

$a)$ 1, 2, 3

$b)$ 0, 2, 4

$c)$ 2, 2, 2

$d)$ 1, 3, 9

## Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: c)

## Zadanie 2:

Wzór ogólny pewnego ciągu, to $b_n = 2^n - n + 1$ . Wskaż trzeci wyraz tego ciągu.

$a)\ b_3 = 7$

$b)\ b_3 = 6$

$c)\ b_3 = 5$

$d)\ b_3 = 4$

## Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: b)

$$b_3 = 2^3 - 3 + 1 = 8 - 3 + 1 = 6$$

# Zadanie 3:

Sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu $(a_n)$ możemy obliczyć korzystając ze wzoru $S_n=5(2^n-1)$ . Wskaż drugi wyraz tego ciągu.

$a)\ a_2=3$

$b)\ a_2=5$

$c)\ a_2=8$

$d)\ a_2=10$

# Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: d)

$$a_1=S_1=5(2^1-1)=5$$

$$a_2=S_2-S_1=5(2^2-1)-5=5\cdot 3-5=10$$

# Zadanie 4:

Wskaż trzeci wyraz ciągu $(a_n)$, jeżeli ciąg ten określony jest wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1=3 \\ a_{n+1}=a_n-3 \end{cases}.$$

$a)\ a=-3$

$b)\ a=0$

$c)\ a=3$

$d)\ a=6$

# Rozwiązanie:

Prawidłowa odpowiedź: a)

$$\begin{cases} a_1=3 \\ a_{n+1}=a_n-3 \end{cases}$$

$$a_1=3$$

$$a_2=a_1-3=3-3=0$$

$$a_3=a_2-3=0-3=-3$$

# Zadanie 5:

Oblicz sumę $5$ początkowych wyrazów ciągu, którego wzór ogólny, to $a_n=5\cdot 2^n$.

# Rozwiązanie:

Ciąg $(a_n)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie równym $q=2$

$$a_1=5\cdot 2^1=10$$

$$S_5=a_1\cdot\frac{1-q^5}{1-q}=10\cdot\frac{1-2^5}{1-2}=10\cdot\frac{1-32}{-1}=10\cdot 31=310$$

Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu $(a_n)$ wynosi $310$.

## Zadanie 6:

Oblicz $x$ jeżeli wiadomo, że liczby $4, (2x+1), 9$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny.

## Rozwiązanie:

Korzystając z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie.

$$(2x+1)^2=4\cdot 9$$

$$4x^2+4x+1=36$$

$$4x^2+4x-35=0$$

$$\Delta=4^2-4\cdot 4\cdot(-35)=576$$

$$x_1=\frac{-4-24}{8}=\frac{-7}{2}$$

$$x_2=\frac{-4+24}{8}=\frac{5}{2}$$

Otrzymaliśmy dwa rozwiązania $x=\frac{-7}{2}$ lub $x=\frac{5}{2}$.

## Zadanie 7:

Ile jest ujemnych wyrazów ciągu $a_n = n^2 - 6n + 5$ ?

## Rozwiązanie:

$$n^2 - 6n + 5 < 0$$
$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$

$$n_1 = \frac{6-4}{2} = 1$$
$$n_2 = \frac{6+4}{2} = 5$$

$$n \in (1,5)$$

Ponieważ $n$ jest liczbą naturalną, to wszystkie liczby które spełniają nieróność $n^2 - 6n + 5 < 0$ to $2$ , $3$ i $4$ . Oznacza, to że są trzy wyrazy ciągu $(a_n)$ , które przyjmują wartości ujemne.

## Zadanie 8:

Wyrazami ciągu arytmetycznego $(a_n)$ są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez $4$ dają resztę $3$ . Oblicz $a_9$ .

## Rozwiązanie:

Wszystkie liczby naturalne, które przy dzieleniu przez $4$ dają resztę $3$ możemy zapisać za pomocą wzoru $4(n-1)+3$ .

$$a_n = 3 + 4 \cdot (n-1)$$
$$a_9 = 3 + 4 \cdot (9-1) = 35$$

# Zadanie 9:

Znajdź trzy takie liczby, które wstawione między $3$ oraz $15$ utworzą wraz z nimi ciąg arytmetyczny.

# Rozwiązanie:

Znajdujemy takie $a_{2,}\ a_{3,}\ a_4$ , aby liczby $3,\ a_{2,}\ a_{3,}\ a_{4,}\ 15$ tworzyły ciąg arytmetyczny.

$$a_n=3+(n-1)r$$

Ponieważ $a_5=15$ , to otrzymujemy:

$$15=3+(5-1)r$$

$$15=3+4r$$

$$12=4r$$

$$r=3$$

Otrzymujemy ostatecznie wzór na $n$ -ty wyraz szukanego ciągu:

$$a_n=3+3(n-1)=3n$$

Na podstawie wzoru ogólnego obliczamy $a_{2,}\ a_{3,}\ a_4$ .

$$a_2=3\cdot 2=6$$

$$a_3=3\cdot 3=9$$

$$a_4=3\cdot 4=12$$

## Zadanie 10:

Wykaż, że suma $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie

$q \neq 1$ wyraża się wzorem $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ .

## Rozwiązanie:

Dany jest ciąg geometryczny $(a_n)$ . Suma $n$ początkowych wyrazów tego ciągu, to

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Niech $q$ będzie ilorazem tego ciągu. Wtedy otrzymujemy:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$
$$\ldots$$
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} =$$
$$= a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$$

Ponieważ $(q^n - 1) = (q-1)(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$ (wzór skróconego mnożenia), to

$$(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = \frac{q^n - 1}{q-1} \quad .$$

$$S_n = a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

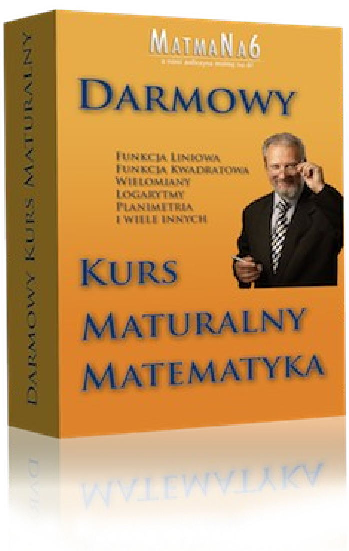
Kolejne części powtórki dostępne będą w poniedziałek pod adresem

http://www.dziennik.pl

Szczegółowe wyjaśnienia zagadnień z działu Ciągi liczbowe, które pomogą Ci w rozwiązaniu powyższych zadań znajdziesz na stronie

http://matmana6.pl/tablice_matematyczne/liceum

Wszelkie uwagi, komentarze na temat powtórki maturalnej można kierować na adres pytania@matmana6.pl.




Redaktorzy serwisu MatmaNa6.pl prowadzą Darmowy Kurs Maturalny z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym, który składa się z ponad 70 lekcji. Każda lekcja zawiera:

1. omówienie wybranego zagadnienia,
2. ćwiczenia interaktywne,
3. przykłady zadań,
4. zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania,
5. rozwiązania zadań z poprzedniej lekcji.

**Kliknij aby zapisać się na kurs.**