Zadanie 26.

$x^2 + 8x + 15 > 0$

Współczynniki: $a = 1, \quad b = 8, \quad c = 15$

Delta: $\Delta = 4$

Miejsca zerowe: $x_1 = -5, \quad x_2 = -3$

Ramiona paraboli skierowane są w górę, więc: $x \in (-\infty, -5) \cup (-3, +\infty)$

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -5) \cup (-3, +\infty)$

Zadanie 27.

Z treści zadania wynika, że: $c > a$ oraz $c > b$.

Z tych nierówności wynika, że: $c - a > 0$ oraz $c - b > 0$.

Stąd otrzymujemy: $c - a + c - b > 0$.

To oznacza, że: $2c - a - b > 0$. /Wykonaliśmy redukcję wyrazów podobnych./

Stąd mamy: $\frac{2c-a-b}{6} > 0$. /Podzieliliśmy obustronnie nierówność przez 6./

Z tego wynika, że: $\frac{2a+2b+2c-3a-3b}{6} > 0$. /Licznik ułamka zapisaliśmy w innej (równoważnej) postaci./

Stąd wynika, że: $\frac{2a+2b+2c}{6} - \frac{3a+3b}{6} > 0$.

Stąd mamy: $\frac{a+b+c}{3} - \frac{a+b}{2} > 0$. /Skróciliśmy ułamki./

I ostatecznie: $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

Uwaga: Do tego rozwiązania dochodzi się rozpoczynając od ostatniego zapisanego wiersza.

Zadanie 28.

Przekształcamy wyrażenie po prawej stronie znaku równości $W(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36$:

Wyłączamy przed nawias x^2 oraz -9:
$W(x) = x^2(x + 4) - 9(x + 4)$

Wyłączamy przed nawias $x + 4$:
$W(x) = (x + 4)(x^2 - 9)$

Korzystamy ze wzory skróconego mnożenia:
$W(x) = (x + 4)(x - 3)(x + 3)$

Stąd odczytujemy, że pierwiastkami wielomianu są: -4, 3 oraz -3.

Poszukiwanym (trzecim) pierwiastkiem wielomianu jest więc -3.

Odpowiedź: $x = -3$.

Zadanie 29.

Wyznaczamy równanie prostej AB:

Ma ona postać: $y = ax + b$
Podstawiając w tym równaniu w miejsce x i y współrzędne punktów A i B, otrzymujemy:

$$\begin{cases} \text{2=-2a+b} \\ \text{10=2a+b} \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb: $a = 2$ i $b = 6$.

Prosta AB ma więc postać: $y = 2x + 6$.

Znajdujemy teraz środek odcinka AB:

$S = (\frac{-2+2}{2}, \frac{2+10}{2})$, skąd $S = (0, 6)$.

Znajdujemy równanie prostej prostopadłej do prostej AB, przechodzącej przez punkt S:

Współczynnik kierunkowy a wynosi: $-\frac{1}{2}$.

Szukana prosta ma więc postać: $y = -\frac{1}{2}x + b$. Współczynnik b znajdujemy podstawiając w tym równaniu w miejsce x i y współrzędne punktu S

Otrzymujemy: $b = 6$.

Prosta, której szukamy ma równanie: $y = -\frac{1}{2}x + 6$

Odpowiedź: $y = -\frac{1}{2}x + 6$.

Zadanie 30.

Załóżmy, że $|\angle APB| < 90°$.

Wtedy $|\angle BAP| + |\angle PBA| > 90°$ (bo suma miar wszystkich kątów w trójkącie - w tym przypadku chodzi o trójkąt ABP - musi wynosić $180°$).

Wtedy $2|\angle BAP| + 2|\angle PBA| > 180°$.

To oznacza, że $|\angle BAC| + |\angle CBA| > 180°$ (bo $2|\angle BAP| = |\angle BAC|$ i $2|\angle PBA| = |\angle CBA|$, gdyż dwusieczna dzieli kąt na dwa kąty o równych miarach).

To oznacza, że suma miar kątów trójkąta ABC jest większa od $180°$, co jest sprzeczne z treścią twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie.

Oznacza to, że $|\angle APB| > 90°$.

Zadanie 31.

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),$
$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(4,7),$
$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(5,7),$
$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(6,7),$
$(7,1),(7,2),(7,3),(7,4),(7,5),(7,6),(7,7)\}$

$A = \{(1,6),(2,3),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6),(4,3),(4,6),(5,6),$
$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(6,7),(7,6)\}$

W zbiorze A jest 17 elementów, w zbiorze Ω 49 elementów.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{17}{49}$.

Zadanie 32.

Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, więc $x = \frac{9+19}{2}$.

Mamy więc $x = 14$.

Ciąg $(14, 42, y, z)$ jest geometryczny (zastąpiliśmy x liczbą 14).

Wyznaczamy iloraz tego ciągu $q = \frac{42}{14}$. Stąd $q = 3$.

$y = 42 \cdot q$, więc $y = 126$

$z = 126 \cdot q$, więc $z = 378$

Odpowiedź: $x = 14, \quad y = 126, \quad z = 378$.

Zadanie 33.

Wyznaczamy pole podstawy ostrosłupa:

Podstawa jest kwadratem o przekątnej długości 4. Bok tego kwadratu jest więc równy $2\sqrt{2}$, a pole 8.

Wyznaczamy wysokość ostrosłupa:

Trójkąt CAE jest prostokątny (kąt CAE jest kątem prostym).

$\frac{|AE|}{|AC|} = tg\angle ACE$.

Stąd i z tego, że $|\angle ACE| = 60°$, a $|AC| = 4$ mamy: $\frac{|AE|}{4} = \sqrt{3}$.

Wysokość ostrosłupa AE jest więc równa $4\sqrt{3}$.

Objętość ostrosłupa wynosi: $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3}$.

Odpowiedź: $V = \frac{32}{3}\sqrt{3}$.

Zadanie 34.

Oznaczmy:
v_p - średnia prędkość pociągu pospiesznego na trasie AB
v_o - średnia prędkość pociągu osobowego na trasie AB
t_p - czas przejazdu pociągu pospiesznego na trasie AB
t_o - czas przejazdu pociągu osobowego na trasie AB

Z treści zadania wynika, że: $v_o = v_p - 24$ oraz $t_o = t_p + 1$. (*)

Dodatkowo wiemy, że:

$$\begin{cases} \mathrm{v}_p t_p = 210 \\ \mathrm{v}_o t_o = 210 \end{cases}$$

Korzystając z zależności (*) otrzymujemy:

$$\begin{cases} \mathrm{v}_p t_p = 210 \\ (\mathrm{v}_p - 24)(t_p + 1) = 210 \end{cases}$$

Stąd otrzymamy ($t_p > 0$):

$$\begin{cases} \mathrm{v}_p = \frac{210}{t_p} \\ \mathrm{v}_p t_p + v_p - 24t_p - 24 = 210 \end{cases}$$

Po podstawieniu za v_p ułamka z pierwszego równania do drugiego i uproszczeniu otrzymamy:

$-24t_p^2 - 24t_p + 210 = 0.$

Dzieląc obustronnie przez -6 doprowadzamy to równanie do postaci:

$4t_p^2 + 4t_p - 35 = 0.$

Jest to równanie kwadratowe o niewiadomej t_p.

Współczynniki: $a = 4, \quad b = 4, \quad c = -35$
Delta: $\Delta = 576$
Miejsca zerowe: $t_p = 2,5$, lub $t_p = -3,5$

Czas przejazdu jest wielkością dodatnią, więc $t_p = 2,5$

Odpowiedź: Czas przejazdu pociągu pospiesznego wynosi 2,5 godziny.